PROBLEME I : ANALYSE

Le problème est consacré à la recherche d'équivalents de certaines intégrales à paramètres. La partie A donne des résultats préliminaires sur la valeur de certaines intégrales utilisées dans la suite du problème. Les parties B et C sont indépendantes entre elles.

Dans tout le problème, on écrira (pour $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$) $f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right)$ pour signifier que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, et $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ pour signifier que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Dans la partie B, on utilisera le résultat suivant (sans avoir à le démontrer) :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \text{ si et seulement si } f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o\left(g(x)\right)$$

PARTIE A :

Soit $a > 0$ un réel fixé. On considère les ensembles $D_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 < a^2\right\}$ et $\Delta_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| < a \text{ et } |y| < a\right\}$ et on définit les intégrales :

$$I(a) = \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$J(a) = \iint_{\Delta_a} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

1). Etablir que $I(a) \le J(a) \le I\left(a\sqrt{2}\right)$

2). Calculer $I(a)$ en fonction de a.

3). Montrer alors que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

4). En déduire les valeurs des intégrales suivantes : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$, $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sqrt{y}\,dy$

PARTIE B :

On pose, pour tout réel $x > 0$: $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt^2} \ln(1+t+t^2)dt$.

1). Justifier l'existence de $g(x)$ pour tout réel $x > 0$.

2). Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \ln(1+t+t^2)$.

3). On pose, pour $t \in \mathbb{R}$: $R(t) = \ln(1+t+t^2) - t - \frac{t^2}{2} + \frac{2t^3}{3}$

a) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{|1+2t|}{1+t+t^2} \leq 2$, et en déduire que $|R'(t)| \leq 2|t|^3$.

b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|R(t)| \leq 2t^4$.

c) Etablir que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt^2} R(t)dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$

4). **a)** Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt^2} t^2 dt = \frac{1}{x^{3/2}} \int_0^{+\infty} e^{-y}\sqrt{y}\, dy$

b) En conclure finalement que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{x^{3/2}}$

PARTIE C :

On pose, pour tout réel $x > 1$: $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{xt(1-\ln t)}dt$ et on note h la fonction numérique définie sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ par $h(u) = (1+u)\ln(1+u) - u$ si $u \neq -1$ et $h(-1) = 1$.

1). Justifier l'existence de $f(x)$ pour tout réel $x > 1$.

2). Montrer que $f(x) = e^x \int_{-1}^{+\infty} e^{-xh(u)}du$.

3). **a)** Vérifier que la fonction h admet sur l'intervalle $[-1;+\infty[$ un minimum que l'on précisera.

b) Donner le développement limité de la fonction h à l'ordre 2 au voisinage de 0.

4). Soit $\lambda \in]0;1[$ un réel fixé.

a) Montrer qu'il existe un réel $\delta \in]0;1[$ tel que :

$$(\forall u \in R) \quad |u| \leq \delta \Rightarrow (1-\lambda)\frac{u^2}{2} \leq h(u) \leq (1+\lambda)\frac{u^2}{2}$$

b) En déduire alors que, pour $x > 1$:

$$\sqrt{\frac{2}{x}}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\int_{-\delta\sqrt{\frac{x(1+\lambda)}{2}}}^{+\delta\sqrt{\frac{x(1+\lambda)}{2}}} e^{-t^2}dt \leq \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-xh(u)}du \leq \sqrt{\frac{2}{x}}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}\int_{-\delta\sqrt{\frac{x(1-\lambda)}{2}}}^{+\delta\sqrt{\frac{x(1-\lambda)}{2}}} e^{-t^2}dt$$

5). Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé.

a) Justifier qu'il existe $\lambda \in]0;1[$ vérifiant $\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \leq 1+\varepsilon$ et $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \geq 1-\varepsilon$.

b) A l'aide des questions **C.4).** et **A.3).**, en déduire qu'il existe un réel $A > 1$ tel que :

$$(\forall x > 1), \quad x \geq A \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2\pi}{x}}(1-2\varepsilon) \leq \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-xh(u)}du \leq \sqrt{\frac{2\pi}{x}}(1+\varepsilon)$$

6). On pose, dans cette question $E = [-1;-\delta] \cup [\delta;+\infty[$, où δ est le réel déterminé dans la question **C.4).a)**.

a) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que : $(\forall x > 1)(\forall u \in E) \quad xh(u) \geq k(x-1) + h(u)$

b) En déduire qu'il existe un réel $B > 1$ tel que : $(\forall x > 1)$

$$x \geq B \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \int_{u \in E} e^{-xh(u)}du \leq \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\varepsilon \cdot$$

(ε désignant toujours le réel strictement positif fixé dans la question **C.5).**)

7). En conclure que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^x$

PROBLEME II : ALGEBRE

n désignant un entier naturel non nul, on note $M_n(C)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Le problème est consacré à la démonstration d'un résultat sur la localisation des valeurs propres des matrices de $M_n(C)$ et à quelques conséquences.

Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq n \atop 1 \leq j \leq n}$ une matrice de $M_n(C)$. Pour tout indice $i \in \{1,..,n\}$, on note ΣL_i le réel positif défini par $\Sigma L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ et on note D_i l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z - a_{ii}| \leq \Sigma L_i$ (ensemble appelé "disque de centre a_{ii} de rayon ΣL_i").

Dans tout le problème, λ désigne une valeur propre quelconque de A et v est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On notera $Sp(A)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres de A.

1). Montrer qu'il existe un entier $i \in \{1,..,n\}$ et un vecteur $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ qui soit vecteur propre de A pour la valeur λ, vérifiant : $w_i = 1$ et $|w_j| \leq 1$ pour tout $j \in \{1,..,n\}$ tel que $j \neq i$.

2). En déduire alors que $|\lambda - a_{ii}| \leq \Sigma L_i$.

3). En conclure que $Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$

4). Appliquer les résultats précédents pour déterminer un segment de $\mathbb{R}$ contenant les trois valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 4 & 0,1 \\ 0,5 & 0,1 & 5 \end{pmatrix}$.

5). Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de $M_n(C)$. On suppose dans cette question que A est à "diagonale strictement dominante", c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1,..,n\}$: $|a_{ii}| > \Sigma L_i$

Montrer que, dans ces conditions, A est une matrice inversible.

6). Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice de $M_n(C)$.

a) On appelle "rayon spectral de la matrice A" le réel positif $\rho(A)$ défini par $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} \{|\lambda|\}$.

Montrer que $\rho(A) \leq \max_{i \in \{1,..,n\}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}$

b) En déduire que $|\det A| \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$